

Cálculo de la velocidad angular de la Tierra mediante el empleo de un Péndulo de Foucault

Emiliano Cabrera, Mateo Fernández Alonso, Lucila Zárate.

El siguiente trabajo consiste en determinar la velocidad de rotación de nuestro planeta utilizando un péndulo de Foucault de aproximadamente 27,35 m de longitud. A través de la medición experimental de los tiempos en los que el plano de oscilación del péndulo recorre ángulos conocidos, pudo determinarse la velocidad de rotación de dicho plano, la cual mediante la utilización de un modelo teórico se la relacionó con la velocidad de rotación de la Tierra.

Introducción:

El siguiente trabajo consta de la determinación de la velocidad angular de rotación de la Tierra mediante la medición de la velocidad aparente del plano de oscilación de un Péndulo de Foucault.

Un Péndulo de Foucault consiste en un péndulo simple capaz de alcanzar largos períodos de oscilación. Durante los mismos se evidencia la rotación de la Tierra en el cambio de orientación del plano de oscilación.*

El trabajo consistirá en medir la velocidad de rotación del plano y relacionarlo con la velocidad de rotación de la Tierra mediante un modelo teórico.

Tomaremos como base teórica la ecuación (1.1) que relaciona la velocidad angular

$$\omega_t = \frac{\omega_p}{\sin(\phi)} \quad (1.1)$$

* * A Direct Treatment of the Foucault Pendulum, Noble William, Acadia University, Wolfville, Nova Scotia. American Journal of Physics, Volume 20, Issue 6, pp. 334-336 (1952).

de la Tierra (ω_t) con la velocidad angular aparente del plano de oscilación del Péndulo (ω_p) mediante el seno de la latitud del lugar (Φ).

Descripción experimental:

Se trabajó con el Péndulo de Foucault de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires ($34^\circ 32' 30''$ lat S). Se trata de un péndulo de Foucault que posee una longitud aproximada de 27,35 m, lo que le permite largos tiempos de oscilación, con un periodo constante de 10,4s (ver apéndice).

La masa del péndulo consiste en una esfera de acero de 90kg y 30cm de diámetro, con una aguja de 4 cm de longitud en su parte inferior (Figura 1).

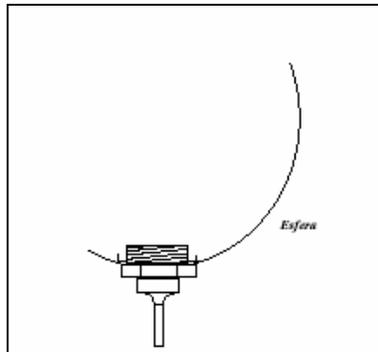


Figura 1: esquema de la masa del péndulo

Lo realizado experimentalmente para alcanzar el objetivo propuesto fue medir con cronómetros el tiempo que le toma al plano de oscilación del péndulo barrer determinados ángulos conocidos. A partir de esta información se calculó la velocidad de rotación de dicho plano.

Para esto se montó el siguiente dispositivo: en la plataforma sobre la que oscila el péndulo se colocaron testigos de paso de 1 cm de diámetro en posiciones determinadas de manera tal que, a medida que el plano de oscilación fuera rotando, la aguja del péndulo fuera volteándolos. De esta forma, conociendo el ángulo entre los testigos, se midió el tiempo transcurrido entre la caída de dos testigos consecutivos (Figura 2).

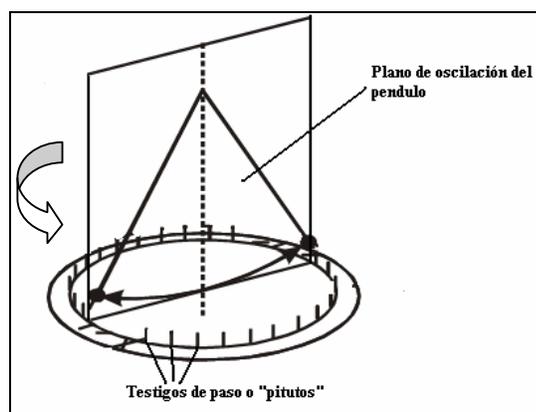


Figura 2: dispositivo montado

Como primera medida, se verificó que el centro de la plataforma se correspondiera con la vertical que traza el péndulo en su punto de equilibrio.

El primer desafío que se presentó fue la determinación de los ángulos donde se colocarían los testigos. Al estar sujeto a la acción de fuerzas disipativas, el péndulo no oscila con amplitud constante, sino que con el paso del tiempo va perdiendo energía y su amplitud disminuye. Se debió entonces encontrar la manera de colocar los testigos sobre ángulos conocidos, en posiciones tales que el péndulo alcanzara a voltearlos. Otro de los motivos por los cuales se tuvo especial cuidado en la determinación de dichas posiciones fue que su distancia al centro de la plataforma influiría sobre las incertezas de la medición (ver “determinación de incertezas”).

Lo que se hizo entonces fue colocar los pitutos a distancias cada vez más cercanas al centro de la plataforma. Dichas distancias fueron medidas mediante una cinta métrica de apreciación 1 mm. Los ángulos sobre los que fueron colocados los pitutos (2°) fueron trazados con hilos desde el perímetro al centro de la plataforma (Figura 3).

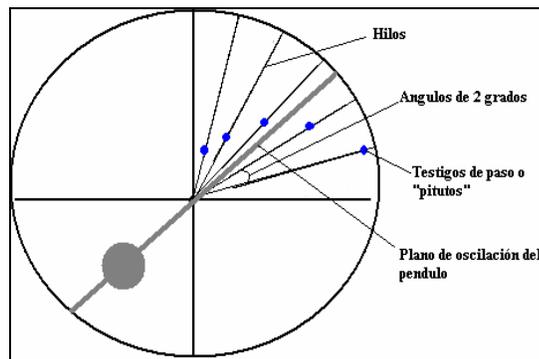


Figura 3: posición de los pitutos sobre la plataforma

Otro problema a resolver fue la estabilidad de la oscilación. Los 90 Kg. de masa de la bola y los casi 30 m de longitud del cable, hacen difícil que el movimiento descrito por el péndulo sea lineal y sin perturbaciones, lo cual es crucial a los efectos del método elegido en este experimento. Para solucionar esto, antes de cada sesión de medición, el péndulo se ató con tanza a una barra fija y se esperó 30 minutos para minimizar los movimientos laterales (Figura 4). Transcurrido ese tiempo se quemó la tanza para que el inicio de la oscilación (que, en definitiva, determina todo el movimiento posterior), sea suave y sin perturbaciones.

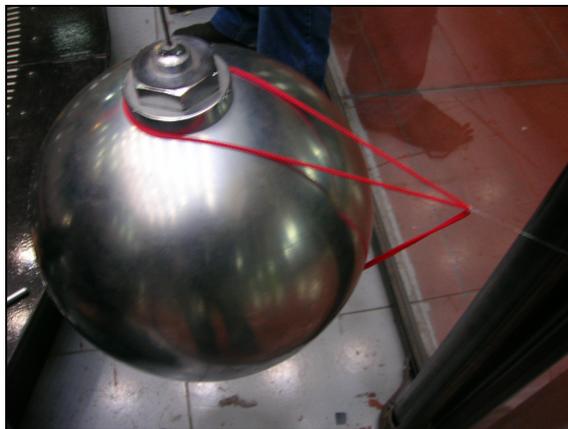


Figura 4: esfera del péndulo atada a una barra fija.

Otro factor determinante en la estabilidad de la oscilación fue la presencia de corrientes de aire actuando sobre la esfera y el cable. El montaje del péndulo cuenta con paneles de acrílico de 80 cm de alto alrededor de la tarima (Figura 5). Sin embargo, éstos no lograban apaciguar la turbulencia que el viento generaba sobre la bola. Entonces para minimizar estos efectos se agregaron paneles de 2 m de altura (Figura 6).

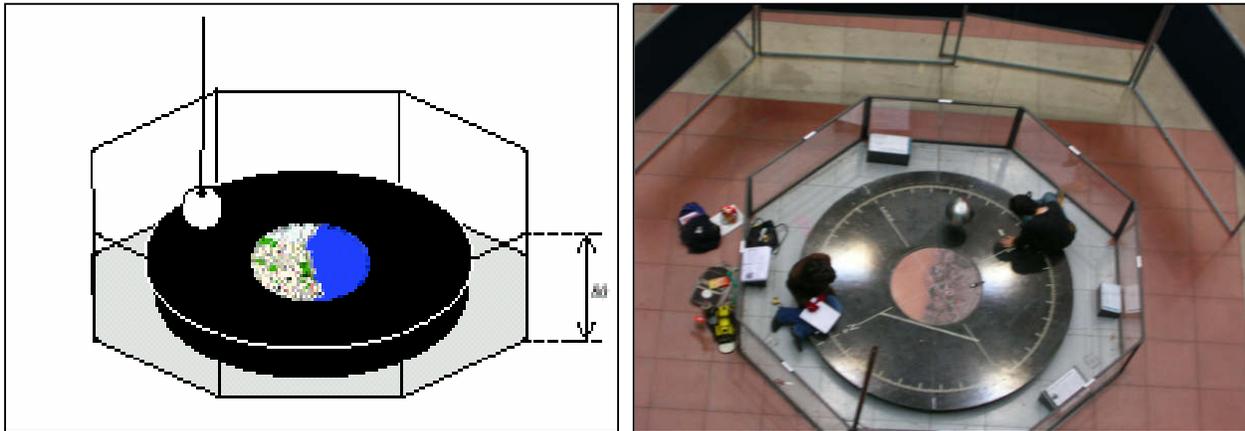


Figura 5 (izq.): paneles de acrílico.

Figura 6 (der.): sobre la parte superior de la imagen se observan los paneles agregados.

Se realizaron dos sesiones de mediciones. En cada una tres observadores midieron con cronómetros de apreciación 0,01 s nueve tiempos correspondientes al barrido de ángulos de 2° . De esta forma se obtuvieron 18 tiempos con los que se calculó la aparente velocidad angular del plano de oscilación

Criterio en la determinación de incertezas

- Ubicación de los testigos de paso:

Es importante tener en cuenta (para un ulterior estudio de las incertezas asociadas a nuestro experimento) que los testigos de paso fueron ubicados, en cada medición, a un radio distinto de acuerdo a la amplitud permitida por el plano de oscilación, que como ya fue aclarado, disminuía con el transcurrir del tiempo. Por lo tanto cada medición de tiempo tendrá asociado una distancia al centro de la plataforma (radio).

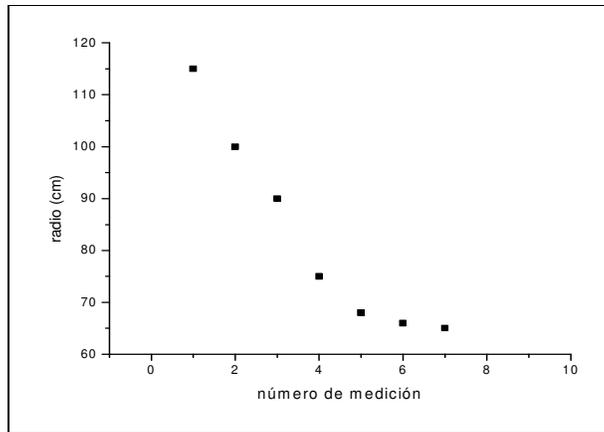


Figura 7: decaimiento en la amplitud de los radios utilizados en la medición para cada serie de 9 mediciones (algunos se utilizaron en mas de una vez)

La fórmula del error correspondiente a ω_p está dada por la ecuación (1.2)

$$E_{\omega_p} = \frac{\delta_\varphi}{\Delta t} + \frac{\Delta \varphi}{\Delta t^2} \delta t \quad (1.2)$$

donde $\delta_t = 10^{-2}$ s corresponde a la incerteza instrumental de los cronómetros utilizados. El ángulo de incerteza considerado (δ_φ) es aquél que resulta de la relación trigonométrica entre el diámetro del testigo de paso (pituto) con su distancia al centro de la plataforma (r), ilustrado en la Figura 8.

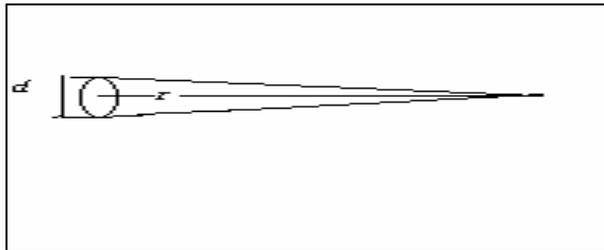


Figura 8: el ángulo de incerteza considerado (δ_φ), donde “d” es el diámetro del pituto y “r” el radio asociado a cada medición.

Análisis y discusión de resultados

Retomando el modelo propuesto para arribar al objetivo final del proyecto, obtener la velocidad de la Tierra, partimos de la ecuación (1.1). De la medición de los intervalos de tiempo correspondientes a ángulos constantes de 2° obtendremos ω_p (velocidad angular del plano).

- **Tiempos medidos**

Las mediciones de tiempo obtenidas se exponen en la Figura 9.

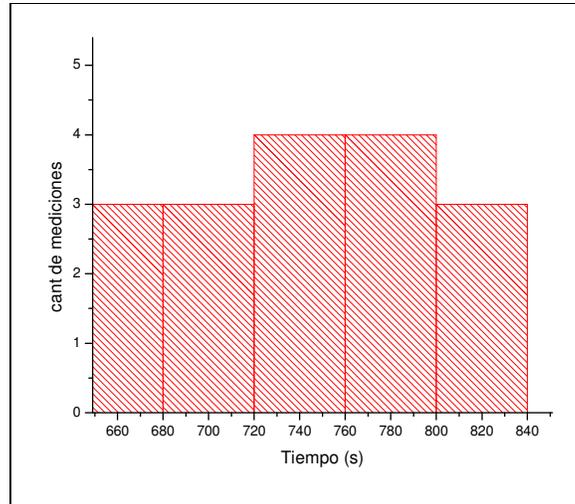


Figura 9: histograma de las mediciones de intervalos de tiempo correspondientes a 2° barridos por el plano de oscilación del péndulo.

- **Cálculo de la velocidad angular de la Tierra (ω_T)**

Una vez obtenidos los intervalos de tiempo correspondientes a amplitudes angulares de $\varphi=2^\circ$, el paso siguiente fue realizar el cálculo de la velocidad angular del plano de oscilación (ω_p) correspondiente a cada medición temporal. La velocidad del plano de oscilación está dada por la ecuación (1.3).

$$\omega_p = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad (1.3)$$

Utilizando dicha ecuación arribamos a los resultados que se observan en la Figura 10.

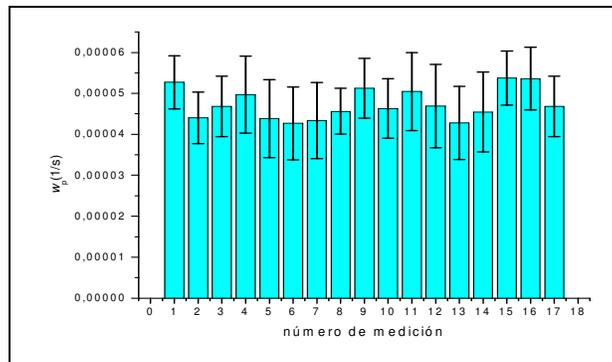


Figura 10: ω_p correspondiente a cada medición de tiempo realizada, graficada con su respectivo error.

Reemplazando los datos obtenidos para ω_p en la ecuación del modelo teórico propuesto (1.1) y propagando sus respectivos errores, obtuvimos los resultados que se muestran en la Figura 11.

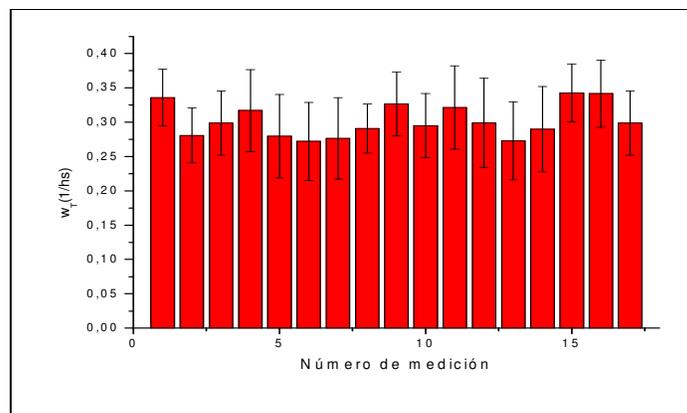


Figura 11: velocidades de la Tierra obtenidas correspondientes a cada ω_p con sus barras de incerteza.

Finalmente, de la estadística de los datos expuestos y de sus respectivos errores, obtuvimos el siguiente resultado final para la velocidad de rotación de la Tierra:

$$\left(0,300 \pm 0,051 \right) \frac{1}{h s}$$

El error relativo correspondiente a este resultado es del 17%. Si bien es alto, es aquél que obtuvimos como consecuencia del montaje mecánico utilizado para medir velocidades angulares.

Podemos entonces afirmar que el modelo teórico propuesto se ajusta al comportamiento de nuestro sistema, dado que el intervalo obtenido para la expresión esperada de la velocidad de rotación de nuestro planeta incluye el valor predicho por la teoría:

$$0,2624 \frac{1}{h s}$$

Conclusión:

Concluimos que mediante el Péndulo de Foucault, no sólo es posible comprobar empíricamente que la Tierra rota, sino que también es posible obtener la velocidad de dicha rotación en un intervalo de confianza que incluye el valor esperado por el modelo teórico expuesto.

Como recomendación para futuros experimentos, se puede agregar que para montajes mecánicos como el que hemos realizado, la incerteza en el resultado final aumenta a medida que se aumenta el diámetro de los testigos de paso. Por lo tanto se lograría una disminución en el error si se trabajara con testigos de paso de menor diámetro.

Bibliografía:

- A Direct Treatment of the Foucault Pendulum, Noble William, Acadia University, Wolfville, Nova Scotia. American Journal of Physics, Volume 20, Issue 6, pp. 334-336 (1952).
- Investigating the nature of the coriolis effects in the fixed frame. Jacques Renault, Emile Okal, dec 1973, Paris, France.
- The Foucault pendulum: A corridor demonstration. Wallace Hilton, Department of Physics, William Jewell College, Liberty, Missouri. 1978 American Association of Physics Teachers
- www.exactas.uba.ar/pendulo

Apéndice:

Especificaciones técnicas del péndulo de Foucault utilizado

Longitud

$$l = 27,35 \text{ m}$$

Doble amplitud máxima

$$2A_{\text{máx}} = 2600 \text{ mm}$$

Flecha

$$F = 31 \text{ mm}$$

Abertura

$$a = 2,7^\circ$$

Energía de la oscilación

$$E = 28 \text{ J}$$

Velocidad en el centro

$$V_c = 0,8 \text{ m/s}$$

Periodo de oscilación

$$T = 10,4 \text{ s}$$

Periodo de rotación aparente del plano de oscilación

$$T_r = 42 \text{ h } 20 \text{ min, sentido de giro antihorario (23 h } 56 \text{ min / sen latitud)}$$

Esféra:

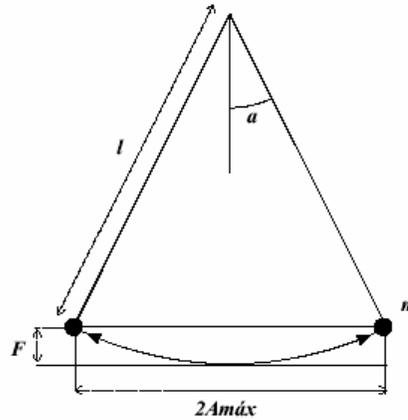
acero 30 cm de diámetro y masa $m = 90 \text{ kg}$

Sistema de suspensión:

balancines en ejes ortogonales tipo cardan realizado con cuchillas de acero Especial K, templado y rectificado. Eje montado sobre serie de crapodinas verticales y bulón extensor de regulación fina de longitud.

Cuerda:

Alambre de acero trefilado en frío, ASTM 227 Clase II, de 2,25 mm de diámetro con resistencia a la ruptura superior a 10.000 N.



Datos de intervalos de tiempo medidos con su radio asociado:

Tiempo (s)	Radio(cm)
$\pm 0,01\text{s}$	$\pm 0,1\text{cm}$
664,00	115,0
795,00	100,0
747,00	90,0
704,00	75,0
798,00	65,0
820,00	68,0
807,00	66,0
767,00	115,0
683,00	100,0
756,00	90,0
694,00	75,0
746,00	65,0
818,00	68,0
770,00	66,0
651,00	115,0
653,00	100,0

747,00 90,0

Velocidades calculadas del plano de oscilación con su respectivo error:

omega plano(1/s)	error relativo %
5,27E-05 ± 6,5E-06	12,29
4,40E-05 ± 6,3E-06	14,29
4,69E-05 ± 7,4E-06	15,71
4,97E-05 ± 9,4E-06	18,86
4,39E-05 ± 9,5E-06	21,71
4,27E-05 ± 8,9E-06	20,86
4,34E-05 ± 9,3E-06	21,43
4,56E-05 ± 5,6E-06	12,29
5,12E-05 ± 7,3E-06	14,29
4,63E-05 ± 7,3E-06	15,71
5,04E-05 ± 9,5E-06	18,86
4,69E-05 ± 1,0E-05	21,71
4,28E-05 ± 8,9E-06	20,86
4,55E-05 ± 9,7E-06	21,43
5,38E-05 ± 6,6E-06	12,29
5,36E-05 ± 7,7E-06	14,29
4,69E-05 ± 7,4E-06	15,71

Velocidades angulares de la Tierra (ω_p) calculadas con su respectivo error:

omega Tierra (1/hs)	error relativo%
0,336 ± 0,041	12,29
2,81E-01 ± 0,040	14,29
2,99E-01 ± 0,047	15,71
3,17E-01 ± 0,060	18,86
2,80E-01 ± 0,061	21,71
2,72E-01 ± 0,057	20,86
2,77E-01 ± 0,059	21,43
2,91E-01 ± 0,036	12,29
3,27E-01 ± 0,047	14,29
2,95E-01 ± 0,046	15,71
3,22E-01 ± 0,061	18,86
2,99E-01 ± 0,065	21,71
2,73E-01 ± 0,057	20,86
2,90E-01 ± 0,062	21,43
3,43E-01 ± 0,042	12,29
3,42E-01 ± 0,049	14,29
2,99E-01 ± 0,047	15,71

Incertezas correspondientes a los ángulos utilizados (δ_ϕ) para cada medición

error ángulo (rad)
0,004
0,005
0,006
0,007
0,008
0,007
0,008
0,004
0,005
0,006
0,007
0,008
0,007
0,008
0,004
0,005
0,006